Concursul Fractal

A Patra Ediție, 8 februarie 2025

Problema 1. Din numerele naturale de la 1 până la n câteva sunt colorate albastru și câteva roșu. Dacă numerele a și b sunt albastre, numărul ab este fie mai mare decât n, fie roșu. Găsiți numărul maxim posibil de numere albastre.

Soluție: Răspunsul este $n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Pentru a arăta că există cel puțin $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ numere roșii luăm perechile de forma $(x; x^2)$, pentru $x \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. E clar că din aceste perechi de numere cel puțin câte unul este roșu. Iar pentru construcție, colorăm toate numerele mai mari decât $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ cu albastru, și pe toate restul roșu.

Problema 2. Numerele reale nenule distincte a, b și c satisfac: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} = \frac{a}{c^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{c}{b^2}$. Găsiți minimul expresiei:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{a^2} + \frac{(a+b)(b+c)}{b^2} + \frac{(c+b)(a+c)}{c^2}$$

Soluție: Aducând la numitor comun și factorizând $\sum a^3c^2 - \sum c^3a^2$ se factorizează ca produsul diferențelor înmulțit cu $ab + bc + ca$, astfel această expresie este zero, deci expresia ce trebuie minimizată este mereu 3.

Problema 3. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii BC, iar N, mijlocul laturii AC. Fie punctul X, care e de aceeași parte a dreptei BC ca și A, și care satisface $MX = MB$. Fie punctul Y piciorul perpendicularei din X pe BC. Fie H piciorul perpendicularei din C pe AB. Aflați raportul $\frac{XY}{CH}$.

Soluție: Raportul este $\frac{1}{2}$. Inițial, e clar din angle-chasing că dreapta formată din punctele de tangență a cercului înscris în triunghi cu laturile AB și AC, se intersectează cu bisectoarea unghiului B și cu linia mijlocie din fața lui C, această intersecție fiind X. În particular, X aparține bisectoarei unghiului B, deci distanța de la el până la AB este egală cu lungimea lui XY, și cu jumătate din înălțime.

Problema 4. Arătați că dacă două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ cu coeficienți întregi satisfac:

$$P(x) \cdot Q(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$$

Atunci unul dintre ele este constant.

Soluție: Se observă conform relațiilor lui Viete sau altor motive că acest polinom este egal cu Φ_{15}, adică al 15-lea polinom ciclotomic și este cunoscut că orice polinom ciclotomic este ireductibil.